→ On en déduit que le tenseur de Riemann traduit l'accélération relative de 2 géodésiques voisines

6 VERS LES EQUATIONS D'EINSTEIN

→ Idée principale de la RG : l'interaction gravitationnelle se manifeste par la courbure de l'espace-temps, et des corps libres suivent des géodésiques.

6.1 Méthode heuristique

→ On procède par analogie avec la théorie de Newton, puisque les équations recherchées doivent s'y réduire dans la limite des champs faibles.

→ L'équation à laquelle on veut pouvoir se réduire est donc l'éq. de Poisson pour le potentiel gravitationnel newtonien :

$$\nabla^2 \Phi \overset{\circledast}{=} 4\pi G\rho$$

→ Le rôle de Φ doit être joué par $g_{\mu\nu}$ (avec la limite $g_{00} = -(1+2\Phi/c^2)$)
On s'attend alors à trouver des dérivée seconde de la métrique dans le LHS des équations d'Einstein. (ex : $R^{\rho}{}_{\sigma\gamma\delta}$, $R_{\mu\nu}$, R).

→ On cherche des équations tensorielles afin d'avoir une théorie invariante pour des transfo qlque de coordonnées.

→ Avant de généraliser le LHS de $\circledast$, on va généraliser le concept de densité de masse.

1.2

② Tenseur énergie - impulsion :

→ En RR ou en RG dans un SCLI, des particules massives suivent des courbes de genre temps $x^\mu(\lambda)$. On peut paramétriser de telles courbes par leur temps propre ($dx^i = 0$) : $d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$

DEF La quadrivitesse est le vecteur tangent à la courbe dans cette paramétrisation : $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ avec $u^\mu u_\mu = -1$
et $u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1, \vec{v})$

DEF La quadri-impulsion d'une particule de masse m est
$$p^\mu = m u^\mu = (E/c^2, \vec{p})$$
↳ L'énergie d'une particule de masse m au repos est $p^0 = E$

→ Pour un observateur $\mathcal{O}'$ en mouvement p/r à la particule, on peut trouver l'énergie en appliquant une transfo de Lorentz. Par ex :
$\begin{cases} t' = \gamma(t + vx) \\ x' = \gamma(x + vt) \end{cases}$ Donc : $p^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} p^\mu \Rightarrow p^{0'} = E' = \frac{\partial t'}{\partial t} p^0 = \gamma m$
$p^{1'} = \frac{\partial x'}{\partial x} p^0 = \gamma m v$

On trouve : $p^{\mu'} = (\gamma m, \gamma m v)$

↳ $p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu = -m^2 = -E^2 + |\vec{p}|^2$

→ De manière générale, l'énergie d'une particule d'impulsion p^μ mesurée par un observateur de vitesse V^μ est $E = -p_\mu V^\mu$
↳ si l'observateur au repos p/r à la particule : $V^\mu = u^\mu$ et
$E = -m u_\mu u^\mu = m$

→ Approximation fluide :

En présence d'un grand nombre de particules, on décrit le système comme un fluide : distribution continue caractérisée par des quantités macroscopiques (densité, pression, viscosité, ...) → éléments de fluide.
L'objet qui capture les propriétés d'un fluide au sein duquel règne un champ p^μ est le tenseur énergie-impulsion.

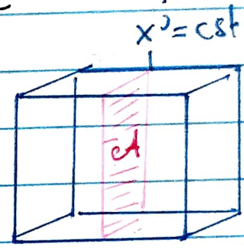
DÉF Le tenseur énergie-impulsion est un tenseur $(0,2)$ symétrique qui contient toute l'information en rapport avec l'énergie du système.

$$T^{\mu\nu} = \text{flux de } p^\mu \text{ à travers la surface } x^\nu = \text{cste}.$$

→ Composantes de $T^{\mu\nu}$:

→ T^{00} = flux d'énergie à travers $t = \text{cst}$
= # de ligne d'Univers qui croise un 3-volume unité de ce 3-volume d'Univers.
= densité d'énergie $\qquad [T^{00}] = E/L^3$

→ $T^{0i} = (\text{flux d'énergie à travers } x^i = \text{cste}) \cdot 1/c$
$= \rho c^2 v^i \cdot 1/c = \rho c v^i = p^i c$



→ T^{ij} = tenseur des tensions
= force entre des éléments ∞-aux voisins.
↳ F^i / dA = flux de p^i à travers dA $(x^j = cst)$ $= T^{ij}$
↳ T^{xy}, T^{yz} : mesure la viscosité entre les éléments fluides
↳ T^{ii} : mesure la pression selon x^i

→ Propriété : $\quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$

Prop Conservation du tenseur énergie-impulsion : $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ pour un fluide dans un réf. inertiel en l'absence de force extérieur.

DÉMO En effet : $E = \int_V T^{00}\, d^3x$

$$\frac{dE}{dx^0} = \int_V \partial_0 T^{00}\, d^3x = -\int_{\partial V} T^{0j}\, d^2\Sigma_j = -\int_V \partial_j T^{0j}\, d^3x$$

$$\rightarrow \int_V (\partial_0 T^{00} + \partial_j T^{0j})\, d^3x = \int_V \partial_\mu T^{0\mu}\, d^3x = 0 \quad \forall V$$

De plus,
$$\frac{dp^j}{dx^0} = \frac{d}{dt}\int_V T^{j0}\, d^3x = -\int_{\partial V} T^{jk}\, d^2\Sigma_k = -\int_V \partial_m T^{jm}\, d^3x$$

$$\Rightarrow \partial_\mu T^{k\mu} = 0. \quad \text{Donc } \partial_\mu T^{\mu 0} = \partial_\mu T^{\mu k} = 0 \quad ■$$

Prop En présence de gravitation, on a $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$

⊙ Idée d'Einstein :

→ En gravitation Newtonienne, on avait $\Delta\Phi = 4\pi G \rho$. Or, on a vu que $T^{00} \sim \rho$ la densité d'énergie. Mais T^{00} n'est que la composante d'un tenseur. Einstein postule que la source du champ gravitationnel doit être $T^{\mu\nu}$ tout entier. On cherche alors une équation du type

$$X^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}$$

→ A gauche de l'équation, on cherche un tenseur symétrique, de divergence nulle, faisant intervenir les 2e dérivées de la courbure ; c'est le tenseur d'Einstein $G^{\mu\nu}$! On obtient alors la 1e version des équations d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad \text{avec } \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

→ On peut rajouter un terme de la forme $\Lambda g_{\mu\nu}$, la constante cosmologique, sans altérer ces propriétés. On obtient alors

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}$$

Ce sont les équations d'Einstein de 1915.

→ Dimensions :

$[R_{\mu\nu}] = L^{-2}$ $\quad [g_{\mu\nu}] = 1$ car $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$[\Lambda] = L^{-2}$

6.2 Limite Newtonienne des EDE

→ A la limite Newtonienne, on considère une situation où le champ gravitationnel est faible, statique, avec de faibles vitesses :

① $v \ll c$

② $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ avec $|h| \ll 1$ et $|\partial h| \ll 1$

③ ∂_0(n'importe quoi) $= 0$

→ Par définition de $T^{\mu\nu}$, on a $T^{00} \sim \rho c^2$ et $T^{0i} \sim \rho c v^i \ll T^{00}$ et $T^{ij} \sim \rho v^i v^j \ll T^{00}$

→ Les équations d'Einstein sont :

→ $$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \quad \Big| \cdot g^{\mu\nu}$$

$$\Leftrightarrow \quad R - \frac{R}{2} \overbrace{\delta^\mu_\mu}^{=4} = \kappa T \Leftrightarrow -R = \kappa T$$

→ Or, $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \simeq g^{00} T_{00} \simeq \eta^{00} T_{00} = -T_{00}$

→ Ainsi, $R \simeq \kappa T_{00}$

→ Rappel : on avait que $h_{00} = -2\Phi/c^2$

→ Calculons R_{00} :

$$R_{00} = R^\mu{}_{0\mu0} = R^i{}_{0i0}$$

Or, $R^i{}_{0j0} = \partial_j \Gamma^i_{00} - \underbrace{\partial_0 \Gamma^i_{0j}}_{\to 0} + \underbrace{\Gamma\Gamma}_{\sim h^2} - \underbrace{\Gamma\Gamma}_{\sim h^2}$

$$R_{00} = \partial_i \Gamma^i_{00} = \partial_i \left(\frac{1}{2} \eta^{i\mu} \left(\cancel{\partial_0 h_{\mu 0}} + \cancel{\partial_0 h_{\mu 0}} - \partial_\mu h_{00} \right) \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \partial_i \eta^{ik} \partial_k h_{00} = -\frac{1}{2} \Delta \left(\frac{-2\Phi}{c^2} \right) = \frac{1}{c^2} \Delta \Phi$$

↳ Ainsi, la composante 00 des EDE s'écrit :

$$R_{00} - \frac{R}{2} g_{00} = \kappa T_{00} \Leftrightarrow R_{00} - \frac{\kappa}{2} T_{00} \underbrace{g_{00}}_{\simeq -1} = \kappa T_{00}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{00} = \frac{\kappa}{2} T_{00} = \frac{\kappa}{2} \rho c^2 \quad \text{car } T_{00} \simeq \rho c^2 \text{ si } v^2 \ll c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{c^2} \Delta \Phi = \frac{\kappa}{2} \rho c^2 \Leftrightarrow \Delta \Phi = \kappa \cdot \frac{c^4}{2} \rho \overset{!}{=} 4\pi G \rho$$

$$\Leftrightarrow \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

rt

6.3 Principe variationnel et EDE

→ La RG est une théorie classique des champs : elle décrit la dynamique du champ $g_{\mu\nu}(x)$. On veut introduire un Lagrangien L à partir duquel on obtiendra les équations du mouvement par le principe variationnel : la configuration classique du champ est celle qui extremise l'action.

⊙ Mécanique classique d'une particule à 1-D :

→ On cherche les points critiques de l'action

$$S[q(t)] = \int dt\, L(q, \dot{q}; t)$$

Sous une variation infinitésimale $q \mapsto q + \delta q$ et $\dot{q} \mapsto \dot{q} + \delta \dot{q}$, l'action varie comme $S \mapsto S + \delta S$. On a alors

$$\delta S = 0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

→ Si on a n particules / ddl : $q(t) \to q_i(t)$. Lorsque $n \to \infty$, les variables deviennent $q_x(t) \triangleq \varphi(x,t)$ (théorie des champs à 2 dimensions).

⊙ Théorie des champs :

→ En général, les variables sont $\Phi^i(x^\mu)$ ex : en e-m, $\Phi^i = A^\mu$

L'action est donnée par :

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i)$$

$[S] = [L][dt] = E.T$
$[\mathcal{L}] = E\,L^{-3}$

→ La variation transforme le lagrangien selon :

$$\mathcal{L}(\Phi + \delta\Phi, \partial_\mu\Phi + \delta\partial_\mu\Phi) = \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu\Phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \cdot \partial_\mu(\delta\Phi)$$

L'action devient :

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}\delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\mu(\delta\Phi) \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)} \right) \delta\Phi \right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall\, \delta\Phi$$

⊙ Motivation de la formulation Lagrangienne :

→ L'ensemble des EOM déterminées à partir d'une équation scalaire

→ Implémentation des symétries (ex : invariance de jauge en E-M).

→ Procédure simple pour déterminer les champs conservés associés aux symétries globales du système.

→ Départ pour la quantification ($Z = \int \mathcal{D}\varphi \, e^{-iS[\varphi]}$ // $\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}$)

⊙ Action d'Einstein-Hilbert :

DEF On introduit l'action d'Einstein-Hilbert S_{EH} :

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}\, R$$

→ Remarque :

① En RR, l'intégrale d'un scalaire est donnée par $\int d^4x \, f(x)$. Elle est invariante sous changement de coord. inertiel.

$$\int d^4x \, f(x) \mapsto \int d^4\bar{x} \, \bar{f}(\bar{x}) = \int d^4x \left| \det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right| f(x)$$

avec $\left|\det \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right| = |\det \Lambda| = 1$

② En RG, les coordonnées se transforment selon :

$$g_{\mu\nu}(x) \mapsto g'_{\mu\nu}(y) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}(x)$$

Son déterminant se transforme selon $g \mapsto g' = \left| \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \right|^{-2} g$

↳ Le déterminant est une densité tensorielle de poids 2.

DEF On introduit alors l'élément de mesure invariant $\sqrt{-g}\, d^4x$

En effet, $\sqrt{-g'}\, d^4x' = \left| \det(\partial y/\partial x) \right|^{-1} \sqrt{-g} \left| \det(\partial y/\partial x) \right| d^4x = \sqrt{-g}\, d^4x$

→ Calculons la variation de l'action

① Variation des Christoffel

Note : les coef de connexion ne sont pas les composantes d'un tenseur.

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\gamma'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \Gamma^{\nu}_{\mu\gamma} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}\partial x^{\gamma'}}$$

Mais la différence de 2 connexions est bien tensorielle.

On calcul $\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ dans un SCLI

→ $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}(\partial_\beta g_{\sigma\gamma} + \partial_\gamma g_{\sigma\beta} - \partial_\sigma g_{\beta\gamma})$

→ $\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}(\nabla_\beta \delta g_{\lambda\gamma} + \nabla_\gamma g_{\beta\lambda} - \nabla_\lambda g_{\beta\gamma})$

② Variation du Riemann :

→ $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma\Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\delta\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma}$

→ $\delta R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \delta\left[\partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\right]$ dans un SLI

$$= \nabla_\gamma \delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \nabla_\delta\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$$

③ Variation du Ricci :

→ $\delta R = \delta(g^{\beta\delta}R_{\beta\delta}) = \delta g^{\beta\delta}.R_{\beta\delta} + g^{\beta\delta}.\delta R_{\beta\delta}$

↳ Comment varie $g^{\alpha\beta}$ lorsque $g_{\alpha\beta}\mapsto g_{\alpha\beta}+\delta g_{\alpha\beta}$?

On sait que $\delta(g^{\alpha\beta} g_{\beta\delta}) = \delta(\delta^\alpha_\delta) = 0$

$= \delta g^{\beta\gamma}.g_{\alpha\beta} + g^{\beta\gamma}.\delta g_{\alpha\beta} = 0 \quad | g^{\alpha\nu}$

$\Leftrightarrow \quad \delta g^{\nu\gamma} = -g^{\alpha\nu} g^{\beta\gamma}\delta g_{\alpha\beta}$ Donc

$$\delta R = -R_{\mu\gamma} g^{\beta\gamma} g^{\alpha\mu} \delta g_{\beta\alpha} + g^{\beta\delta}(\nabla_\alpha\delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \nabla_\delta\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha})$$

↳ $\delta R = -R^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + g^{\beta\delta}(\nabla_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \nabla_\delta\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha})$

④ Variation de la racine du déterminant :

Pour cela, il faut introduire un lemme.

Lemme Soit M une matrice carrée. Sous une transfo des éléments de M, la variation de $\log(\det M)$ est donnée par :

$$\delta \log(\det M) = \mathrm{Tr}\,(M^{-1}\,\delta M)$$

DEMO : On a $|\det M| = e^{\mathrm{Tr}\log M}$. Alors $\log(\det M) = \mathrm{Tr}\log M$

$$\Rightarrow \delta \log(\det M) = \frac{\delta|\det M|}{|\det M|} = \mathrm{Tr}\,\delta \log M = \mathrm{Tr}\,M^{-1}\delta M \qquad \blacksquare$$

→ Soit $M = g_{\mu\nu}$. Puisque la métrique est Lorentzienne, on a :

$$\det g_{\mu\nu} = g < 0 \Rightarrow |\det g_{\mu\nu}| = -g$$

↳ $\delta(-g)/(-g) = \mathrm{tr}\,(M^{-1}\delta M) = g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$. Ainsi,

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}(-g)^{-1/2}\,\delta(-g) = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$$

⑤ Variation totale :

$$\delta(R\sqrt{-g}) = \delta R.\sqrt{-g} + R\,\delta\sqrt{-g}$$

$$= \sqrt{-g}\left(-R^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} + g^{\beta\delta}(\nabla_\alpha\,\delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \nabla_\delta\,\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\right) + \frac{R}{2}g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$$

$$= \sqrt{-g}\left(-R^{\alpha\beta} + \frac{R}{2}g^{\alpha\beta}\right) + \nabla_\alpha\overbrace{\left(g^{\beta\delta}\,\delta\Gamma^\alpha_{\beta\delta} - g^{\beta\alpha}\,\delta\Gamma^\mu_{\beta\mu}\right)}^{\hat{=}\,V^\alpha}$$

→ On trouve $\delta S_{EH} = \int d^4x\,\sqrt{-g}\,\delta g_{\mu\nu}\,(-G^{\mu\nu}) + \underbrace{\sqrt{-g}\,\nabla_\alpha V^\alpha}_{\text{terme "en trop"}}$

Prop $\sqrt{-g}\,\nabla_\alpha V^\alpha = \partial_\alpha(\sqrt{-g}\,V^\alpha)$

DÉMO : $\nabla_\alpha V^\alpha = \partial_\alpha V^\alpha + \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}V^\mu = \partial_\alpha V^\alpha + \left(\frac{1}{2}g^{\alpha\mu}\,\partial_\lambda g_{\mu\alpha}\right)V^\lambda$

Or, $\partial_\alpha\sqrt{-g} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\,\partial_\alpha g_{\mu\nu}\sqrt{-g}$ donc $\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\lambda\sqrt{-g}$

Ainsi, $\nabla_\alpha V^\alpha = \partial_\alpha V^\alpha + \frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\lambda\sqrt{-g})V^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\alpha(\sqrt{-g}\,V^\alpha)$ $\blacksquare$

Ainsi, le terme en trop est un terme de bord

→ On a montré que $\dfrac{\delta(R\sqrt{-g})}{\delta g_{\mu\nu}} = -\sqrt{-g}\,G^{\mu\nu}$

Généralisation du principe variationnel :

→ Inclusion de la constante cosmologique :

On considère $S = \int d^4x \sqrt{-g}\,(R+\alpha)$, α constante. Alors

$$\delta S = \int d^4x \left(\delta(R\sqrt{-g}) + \alpha\, \delta\sqrt{-g} \right) = \int d^4x \left(\sqrt{-g}\,(-G^{\mu\nu})\,\delta g_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} \right)$$

$\Rightarrow \delta S = 0 \Leftrightarrow G_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{2} g_{\mu\nu} = 0$. On identifie $\alpha = 2\Lambda$

Le Lagrangien devient $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda)$

→ Inclusion de matière :

On a : $S_{tot} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\, R\sqrt{-g} + S_{matière}(\Phi, \nabla\Phi, g_{\mu\nu}, \dots)$

Les équations du mouvement pour la métrique sont

$$\frac{\delta S_{tot}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \Leftrightarrow G^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{mat}}{\delta g_{\mu\nu}} \hat{=} 8\pi G\, T^{\mu\nu}$$

→ $T^{\mu\nu}$ ne coïncide pas forcément avec le tenseur énergie-impulsion canonique $H^{\mu\nu} \hat{=} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^i)}\partial^\nu \Phi^i + \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}$ qui satisfait $\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$

et qui est associé aux charges $P^\mu = \int d^3x\, H^{0\mu}$

Identités de Bianchi et covariance de S_{EH} :

→ Nous avons vu que pour une variation arbitraire de la métrique, l'action varie comme $\delta S = -\int d^4x \sqrt{-g}\, G^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$. Nous allons particulariser cette variation à un difféomorphisme

(isomorphisme bijectif différentiable, de réciproque différentiable)

$$x^\mu \mapsto x^{\mu'} \hat{=} x^\mu + \xi^\mu \quad \text{avec } |\xi^\mu| \ll 1$$

→ Le vecteur tangent à la courbe $x'^\nu(\epsilon)$ en $\epsilon = 0$ est

$$\xi^\mu = \left.\frac{dx'^\mu}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$$ et est dit générer la transformation

Pour une transfo active, $\xi^\mu(x)$ exprime comment les points sont déplacés sur la variété.

→ Sous difféomorphisme, $\delta_\xi S = -\int d^4x \sqrt{-g}\, G^{\mu\nu}\, \delta_\xi g_{\mu\nu}(x)$

↳ que vaut $\delta_\xi g_{\mu\nu}(x)$?

$$\xi^\alpha \equiv \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} x'^\alpha$$

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta}(x')$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(x^\alpha + \epsilon \xi^\alpha\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(x^\beta + \epsilon\xi^\beta\right) g'_{\alpha\beta}(x+\epsilon\xi)$$

$$= \left(\delta^\alpha_\mu + \epsilon\partial_\mu \xi^\alpha\right)\left(\delta^\beta_\nu + \epsilon\partial_\nu\xi^\beta\right)\left(g'_{\alpha\beta}(x) + \epsilon\xi^\sigma\partial_\sigma g'_{\alpha\beta}(x)\right)$$

$$= g'_{\mu\nu} + \epsilon\left(\partial_\mu\xi^\alpha g_{\alpha\nu}(x) + \partial_\nu\xi^\beta g_{\mu\beta}(x) + \xi^\sigma\partial_\sigma g_{\mu\nu}(x)\right)$$

$$\hookrightarrow \delta_\xi g_{\mu\nu}(x) = \epsilon\left(\partial_\mu\xi^\alpha g_{\alpha\nu} + \partial_\nu\xi^\beta g_{\mu\beta} + \xi^\sigma\partial_\sigma g_{\mu\nu}\right)$$

DEF On définit la dérivée de Lie de la métrique le long de ξ comme

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\frac{g_{\mu\nu}(x) - g'_{\mu\nu}(x)}{\epsilon}$$

$$= \partial_\mu\xi^\alpha g_{\alpha\nu} + \partial_\nu\xi^\beta g_{\mu\beta} + \xi^\sigma\partial_\sigma g_{\mu\nu}$$

→ Exemple : dérivée de Lie d'un scalaire

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi'(x) + \epsilon\xi^\sigma\partial_\sigma\phi'(x)$$

$$\Rightarrow \delta_\xi\phi \equiv \phi(x) - \phi'(x) = \epsilon\,\xi^\sigma\partial_\sigma\phi(x)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_\xi\phi = \xi^\sigma\partial_\sigma\phi$$

→ Remarque : si pour une métrique $g_{\mu\nu}$ et un champ de vecteur ξ, on a que $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$, alors la forme de la métrique est inchangée sous l'action des difféomorphisme $x^\mu \mapsto x'^\mu$ généré par ξ^μ.

DEF Le champ de vecteur ξ est dit de Killing pour la métrique $g_{\mu\nu}$ si $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$. Le difféomorphisme associé est appelé une isométrie

→ Exemple : la métrique de Minkowski a 10 vecteurs de Killing qui correspondent aux transformations du groupe de Poincaré.

$\xi = \partial_t$ génère $t \mapsto t' = t + \text{cste}$ laisse $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ invariante.

Prop $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 2\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)}$

DEMO : Dans un SCLI, on a :

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi^\alpha g_{\alpha\nu} + \partial_\nu \xi^\alpha g_{\alpha\mu} + \xi^\sigma \partial_\sigma g_{\mu\nu}$$
$$= \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu$$

$\blacksquare$

→ Remarque : on distingue l'invariance et la covariance d'un objet :

$A_{\mu\nu}$ est covariant $\Leftrightarrow$ $A'_{\mu\nu}(x') = A_{\alpha\beta}(x)\, \partial_\alpha x'^\mu \, \partial_\beta x'^\nu$

$A_{\mu\nu}$ est invariant $\Leftrightarrow$ $\mathcal{L}_\xi A_{\mu\nu} = 0$

→ Pour l'action $S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g}\, R$, on a donc

$$\delta_\xi S = \int d^4x \, \delta_\xi(\sqrt{-g}\, R)$$

↳ $\delta_\xi(\sqrt{-g}\, R) = R\, \delta_\xi \sqrt{-g} + \sqrt{-g}\, \delta_\xi R$

$$= \frac{R}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \delta_\xi g_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\, \delta_\xi R$$

$$= \frac{R}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}(\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) + \sqrt{-g}\, \xi^\sigma \partial_\sigma R$$

$$= \sqrt{-g}\,(R\nabla^\mu \xi_\mu + \xi^\mu \partial_\mu R) = \sqrt{-g}\, \nabla_\mu(\xi^\mu R)$$

On trouve que la variation sous difféo de S_{EH} est

$\delta_\xi S = \int d^4x \, \partial_\mu(\sqrt{-g}\, \xi^\mu R)$ un terme de bord !

$\delta_\xi S = 0$

Or, on avait $\delta_\xi S = -\int_M d^4x \sqrt{-g}\, G^{\mu\nu} \delta_\xi g_{\mu\nu} = 0$

$\delta_\xi S = -\int d^4x \sqrt{-g}\, G^{\mu\nu}(\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu) = -2\int d^4x \sqrt{-g}\, G^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu$

Or, $G^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu = -\xi_\nu \nabla_\mu G^{\mu\nu}$ car le terme de bord tombe

$\delta_\xi S = 2\int d^4x \sqrt{-g}\, \xi_\nu \nabla_\mu G^{\mu\nu}$

Prop On a montré que $\delta_\xi S = 0 \ \forall \xi / \xi|_{\partial M} = 0 \Rightarrow \nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$

Les identités de Bianchi sont une conséquence de la covariance généralisée de S_{EH}, ou encore de son invariance sous des difféomorphismes qui s'annulent au bord.

⊙ Signification des identités de Bianchi :

→ La covariance généralisée des EDE implique les identités de Bianchi. A 1e vue, il y a 10 équations ($G_{\mu\nu} = 0$) pour 10 inconnues, les composantes de la métrique.

Mais ce sont des eq. du 2e ordre. Si on se fixe comme conditions initiales ($g_{\mu\nu}, \partial_t g_{\mu\nu}$) sur une hypersurface de genre espace, on devrait trouver une solution unique. Mais on est libre d'appliquer un difféomorphisme général sur la solution (qui dépend de 4 fonctions de 4 variables), et d'obtenir une solution physiquement équivalente ⇒ Les EDE ne peuvent pas déterminer uniquement $g_{\mu\nu}$, seulement modulo une transfo générale des coordonnées → Seules 6 des 10 équations de $G_{\mu\nu} = 0$ sont indépendantes.

→ Les identités de Bianchi sont 4 relations différentielles qui lient les 10 EDE.

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0 = \partial_\alpha G^{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} G^{\mu\beta} + \Gamma^\beta_{\alpha\mu} G^{\alpha\mu}$$

$$\Rightarrow \partial_t G^{t\beta} = \partial_k G^{k\beta} - \Gamma G - \Gamma G$$

↳ $G^{t\beta} = 0$ représente les 4 éq. de contraintes sur les conditions initiales $g_{\mu\nu}$ et $\partial_t g_{\mu\nu}$, pas des équations d'évolution pour ces données initiales.